Appunti del corso ”Fondamenti di Analisi e Didattica”

(PAS 2013-2014, Classe A049, docente prof. L. Chierchia)

redatti da Andrea Damiani, Valentina Pantanetti, Rita Caruso, Maria Laura Conciatore, Carla De Maggi, Elisa Becce (Le note a piè di pagina sono dei redattori)

Lezione 1 - Presentazione

Il 1872 è l'anno fondamentale: Cantor, Dedekind e Meray giungono, separatamente, a definire in maniera rigorosa i numeri reali.

Georg Cantor: *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (articolo in tedesco apparso nei "Matematische Annalen"), traducibile in *Sull'estensione di un teorema dela teoria delle serie trigonometriche*. I numeri reali come classi di equivalenza di successioni di Cauchy.

Richard Dedekind: opuscolo *Stetigkeit und irrationale Zahlen* tradotto in *Continuità e numeri irrazionali*. Numeri reali come tagli sulla retta, elementi di separazione di classi contigue. Dedekind afferma che la sua formalizzazione dei numeri reali consente di dimostrare, per la prima volta, risultati quali: $\sqrt{6} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$.

Bibliografia consigliata

Solomon Feferman: fondamenti della matematica nel XX secolo.

E. Giusti: piccola storia del calcolo infinitesimale (2007).

Hardy - Wright: introduzione alla teoria dei numeri (1938).

Morris Kline: Storia della matematica.

A. Masi, Tesi di Laurea (Università di RomaTRE): Fondamenti Analitici dei Numeri Reali e Didattica.

W. Rudin: Analisi I. Il punto di partenza del volume è la definizione assiomatica di $\mathbb{R}$.

L'eredità greca in Analisi: Quattro teoremi fondamentali

Convergenza della serie geometrica e sua somma

Nota introduttiva: poche serie si sanno "risommare" esattamente. Ad esempio,

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

è la funzione ζ (zeta) di Riemann e, calcolata in $\sigma = 2$, dà il valore

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

La dimostrazione standard di questo fatto non è elementare ed usa la teoria delle serie di Fourier.

Consideriamo, invece, la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

con $x \in \mathbb{R}$. Scriviamo la somma parziale S_n

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Moltiplicando per x,

$$x\,S_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1}$$

da cui

$$S_n(1-x) = 1 - x^{n+1}$$

quindi, per $x \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

e per $|x| < 1$ otteniamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

Conseguenza di questa formula è, ad esempio, che $0, \overline{9} = 1$. Infatti

$$0, \overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = 9 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k = 9 \times \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Sussiste poi il seguente

TEOREMA: I numeri razionali hanno espansione decimale finita o periodica.

Ne segue che, ad esempio, il numero $0,101001000\ldots$ è irrazionale.

Teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora è ovviamente un bellissimo risultato di geometria euclidea. Ciononostante, esso si presta a notevoli estensioni anche infinito dimensionali (spazi di Hilbert)[1].

Irrazionalità di $\sqrt{2}$

La prima dimostrazione risale ad Aristotele.

TEOREMA: Il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale.

DIM (per assurdo): supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale, quindi $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con p e q coprimi, $(p, q) = 1$, cioè p e q non hanno divisori (interi) comuni eccetto 1. Allora $p^2 = 2q^2$. Quindi p^2 è pari, dunque p è pari e posso scriverlo come $p = 2k$, con k intero, quindi $(2k)^2 = 2q^2$ quindi $q^2 = 2k^2$ ma allora anche q è pari, ma questo è assurdo perché p e q sono coprimi per ipotesi.

[1] Si conoscono oltre 400 dimostrazioni del terorema, a partire da quella dovuta a Euclide e presente negli Elementi (prop I-47). Fra di esse, anche una di Einstein dodicenne e una di James Garfield (1876), presidente degli Stati Uniti.

DEFINIZIONE: Numeri algebrici: radici (anche complesse) di polinomi a coefficienti interi.

I numeri algebrici sono - tra i numeri reali - "pochi": ad esempio, la misura di Lebesgue dell'insieme dei numeri algebrici in $\mathbb{R}$ è 0. Quindi, la quasi totalità dei numeri reali è trascendente (ossia costituita da numeri non algebrici). Dal punto di vista statistico, estraendo un numero reale a caso, la probabilità di trovarlo algebrico è pari a zero. Dimostare che un dato numero è non algebrico, cioè è trascendente, non è impresa semplice. Sono esempi classici e ben conosciuti di numeri trascendenti e e[2] π.

Infinità dei numeri primi

Si parla di numeri naturali. È uno dei primi teoremi dimostrati in teoria dei numeri. La crittografia, usata nelle transazioni finanziarie e praticamente ovunque nelle comunicazioni, si basa sulle proprietà dei numeri primi.

Prerequisiti

DEFINIZIONE (numero primo): un numero intero p è primo se $p > 1$ e ha come unici divisori se stesso e 1.

Il numero 1 non è primo. Se lo fosse, verrebbe meno il teorema di unicità della scomposizione in fattori.

TEOREMA (fondamentale dell'aritmetica - prima parte) Elementi VII 31: Un numero composto (non primo) è divisibile per qualche numero primo.

TEOREMA (fondamentale dell'aritmetica - seconda parte) Elementi IX 14: La scomposizione in fattori è unica.

LEMMA (di Euclide): Se il numero intero g divide sia a che b (con $a > b$) allora g divide la differenza $a - b$.

---

[2] Per quest'ultimo fu dapprima provata l'irrazionalità da Lambert nel 1761. Poi nel 1882 Ferdinand Von Lindemann dimostrò che si tratta di un numero trascendente (Questione affrontata nel quesito 8 del compito di maturità scientifica 2011). Per certi versi opposto fu il tentativo di tale Edwin J. Goodwin, che nel 1897 fece approvare dal parlamento dello stato dell'Indiana il valore $\pi = 4$. Il medesimo individuo era già noto come autore di altre notevoli *scoperte matematiche*, fra cui metodi per la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo. Una tabella di numeri trascendenti notevoli si trova su *http://mathworld.wolfram.com/TranscendentalNumber.html*

Il teorema dell'infinità dei numeri primi

Il problema della ricerca dei numeri primi non si affronta attraverso formule, ma mediante la fattorizzazione. Non c'è un metodo costruttivo per elencare i numeri primi: occorre effetture la scomposizione in fattori di ogni numero.

TEOREMA: i numeri primi sono infiniti. Il teorema è dovuto a Euclide: si trova negli Elementi (IX 20).

DIM (per assurdo) Supponiamo che i numeri primi siano in quantità finita n. È allora possibile metterli in ordine crescente:

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n$$

Definiamo il numero $p = \prod_k p_k + 1$. Il numero p è chiaramente più grande di tutti i p_k, quindi p non può essere primo, perché abbiamo stabilito che la famiglia $\{p_1 \dots p_n\}$ esaurisce tutti i numeri primi. Allora deve essere divisibile almeno per uno dei p_k, ad esempio per p_1. Ma p_1 divide ovviamente $p = \prod_k p_k$; se esso divide anche $p = \prod_k p_k + 1$ allora, per il lemma di Euclide, deve dividere la loro differenza, che è 1. Tuttavia, p_1, essendo un numero primo, non può essere minore di 2. Il ragionamento può ripetersi per $p_2, p_3 \dots, p_n$. Si conclude che p non può essere composto, e la tesi è provata.

Questa dimostrazione sembra suggerire la successione $\{q_k\}$, in cui q_k =1 + il prodotto dei primi k numeri primi, come un modo per generare altri numeri primi. Proviamo ad elencare i primi 6 elementi della successione:

$$\begin{aligned}
&q_1 = 2 + 1 = 3\\
&q_2 = 2 \times 3 + 1 = 7\\
&q_3 = 2 \times 3 \times 5 + 1 = 31\\
&q_4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211\\
&q_5 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2311\\
&q_6 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031 = 509 \times 59
\end{aligned}$$

Quindi i numeri $q_1 \dots q_5$ sono primi, ma q_6 non lo è: la successione non genera esclusivamente numeri primi.